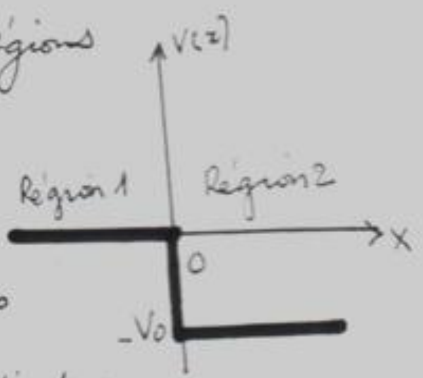
Corrigé type du Rattrapage

de Mécanique quantique I

1

Exercice 1 : (7,5)

1) les équations de Schrödinger dans les deux régions



$$H\varphi = E\varphi(x), \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$$

Dans la région 1 : $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$; $V = 0$

Dans la région 2 : $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_0$; $V = -V_0$

En remplaçant dans la première équation, on obtient :

Région 1 $\quad \varphi = \varphi_1 \quad \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + k_1^2\varphi_1 = 0$ (1) avec $k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$

Région 2 $\quad \varphi = \varphi_2 \quad \frac{d^2\varphi_2}{dx^2} + k_2^2\varphi_2 = 0$ (1) avec $k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)$

les solutions de ces deux dernières équations sont : (2,5)

$$\varphi_1(x) = A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x}$$

$$\varphi_2(x) = A_2 e^{ik_2x} + B_2 e^{-ik_2x} \quad \text{avec } B_2 = 0 \quad (0,5)$$

2) les conditions de raccordement au point $x = 0$ sont :

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) \Rightarrow A_1 + B_1 = A_2$$

$$\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) \Rightarrow k_1(A_1 - B_1) = k_2 A_2$$

Après calcul, on obtient : $\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ (1), $\frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$ (1)

$$\varphi_1(x) = A_1 e^{ik_1x} + \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right) A_1 e^{-ik_1x}$$

$$\varphi_2(x) = \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right) A_1 e^{ik_2x}$$

3> Probabilité pour que la particule soit réfléchie si $E = \frac{V_0}{3}$

$$R = \left(\frac{B_1}{A_1}\right)^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$$ 0,5

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\frac{V_0}{3}} \quad ; \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{V_0}{3} + V_0\right)} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\frac{4V_0}{3}} = \sqrt{\frac{8mV_0}{3\hbar^2}}$$

$$R = \left(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{8}{3}}}{\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{8}{3}}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{8}}{\sqrt{2} + \sqrt{8}}\right)^2 = \frac{10-8}{10+8} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

1,5

Exercice 2 : (13 pts)

Dans la base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ et à $t = 0$: $|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} a \\ \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

1> Calcul de a :

Le ket $|\psi\rangle$ est normé à l'unité : $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

$$\langle\psi| = \left(a \quad -\frac{i}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad ; \quad \langle\psi|\psi\rangle = \left(a \quad -\frac{i}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\begin{pmatrix} a \\ \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = 1$$

$$= a^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ 1

2> Valeurs propres et vecteurs propres de A :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|cc} \varepsilon_1 & & \varepsilon_2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

A étant une observable donc elle est hermitique $b = a$

on divise la matrice par bloc : le bloc correspondant à ε_1 est un simple nombre : ε_1 est engendré par le vecteur $|u_1\rangle$

$A|u_1\rangle = a|u_1\rangle \Rightarrow$ le 1er vecteur propre $|\varphi_1\rangle = |u_1\rangle$ 1

correspondant à la 1ère valeur propre $a = \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

0,5

La matrice représentant B dans $\mathcal{E}_2$ (engendré par $|\psi_2\rangle$ et $|\psi_3\rangle$) est une matrice diagonale égale à $A = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

A hermitique $\Rightarrow$ matrice diagonalisable, cad que dans $\mathcal{E}_2$, on peut trouver une base $|\varphi_n\rangle$ dans laquelle A sera représentée par une matrice diagonale.

Valeurs propres de B : $\det(B - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\lambda^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \pm a \quad 0,5$$

Pour $\lambda_2 = a = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle\right)$ 1

Pour $\lambda_3 = -a = -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow |\varphi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_2\rangle - |\psi_3\rangle\right)$ 1

3) les valeurs possibles de la grandeur physique représentée par A sont les valeurs propres de A (postulat 3) à savoir $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $-a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 2

* a étant une valeur propre double : $P(a) = |\langle\varphi_1|\psi\rangle|^2 + |\langle\varphi_2|\psi\rangle|^2$

$$|\langle\varphi_1|\psi\rangle|^2 = \left|(1\ 0\ 0)\cdot\begin{pmatrix} a \\ \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\right|^2 = a^2 = \frac{1}{3}$$

$$|\langle\varphi_2|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(0\ 1\ 1)\begin{pmatrix} a \\ \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{i}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right|^2 = \frac{1}{6}\left|(i+1)\right|^2 = \frac{1}{3}$$

$$P(a) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad 1$$

* $P(-a) = |\langle\varphi_3|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(0\ 1\ -1)\begin{pmatrix} a \\ \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\right|^2$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{i}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right|^2 = \frac{1}{6}\left|(i-1)\right|^2 = \frac{1}{3} \quad 1$$

* La valeur moyenne à l'instant $t=0$: $\langle A\rangle_{t=0} = \sum \lambda_n P(\lambda_n)$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad 1$$

④

L'evolution de la valeur moyenne d'une observable dans le temps

dans un état normé est donnée par (Voir cours)

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [A,H]\rangle + \langle \frac{\partial A}{\partial t}\rangle \quad 1$$

Sachant que $H = \hbar\omega I \Rightarrow [A,H] = 0$; $\langle \frac{\partial A}{\partial t}\rangle = 0$ 1

on a donc $\frac{d\langle A\rangle}{dt} = 0$ A est une constante de mouvement. 1